Mouvement en 2D, mouvement relative

Calcul de vitesse pour mouvement 3D en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}\right)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(x(t)\hat{x}\right)}{dt} + \frac{d\left(y(t)\hat{y}\right)}{dt} + \frac{d\left(z(t)\hat{z}\right)}{dt}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}\hat{z} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{z} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{z}$$

étape uniquement possible car les vecteurs unitaires ne dépendent pas du temps !

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{pmatrix}}$$

Calcul de l'accélération pour mouvement 3D en coordonnées cartésiennes

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z}\right)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{x}(t)\hat{x}\right)}{dt} + \frac{d\left(\dot{y}(t)\hat{y}\right)}{dt} + \frac{d\left(\dot{z}(t)\hat{z}\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\dot{x}(t)}{dt}\hat{x} + \frac{d\dot{y}(t)}{dt}\hat{y} + \frac{d\dot{z}(t)}{dt}\hat{z}$$

étape uniquement possible car les vecteurs unitaires ne dépendent pas du temps !

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{pmatrix}}$$

Exemple travaillé : balistique

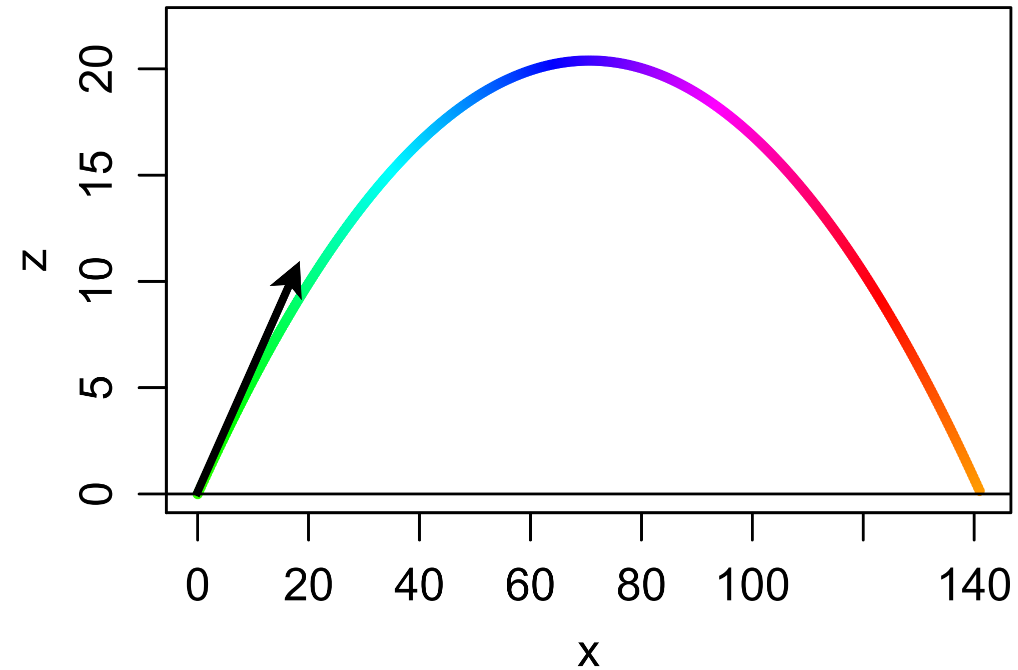
« Le but, c'est le chemin »

Goethe

- portée
- hauteur maximale
- temps de vol
- portée extrême

Balistique

En l'absence de résistance aérodynamique, le mouvement est déterminé par l'accélération de forme



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix}$$

$$v_x(t) = v_{0x} \qquad v_y(t) = v_{0y} \qquad v_z(t) = v_{0z} - gt$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}t \qquad z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{g}{2}t^2$$

Pour déterminer la trajectoire, il faut déterminer les conditions initiales (vitesse et lieu). Par exemple, pour un tir oblique depuis la surface, avec vitesse de départ v_0 faisant angle α avec l'horizontale, le bon choix de repère nous donne les équations suivantes :

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$
$$v_{0y} = 0$$
$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

$$v_x(t) = v_{0x}$$
$$x(t) = v_{0x}t$$

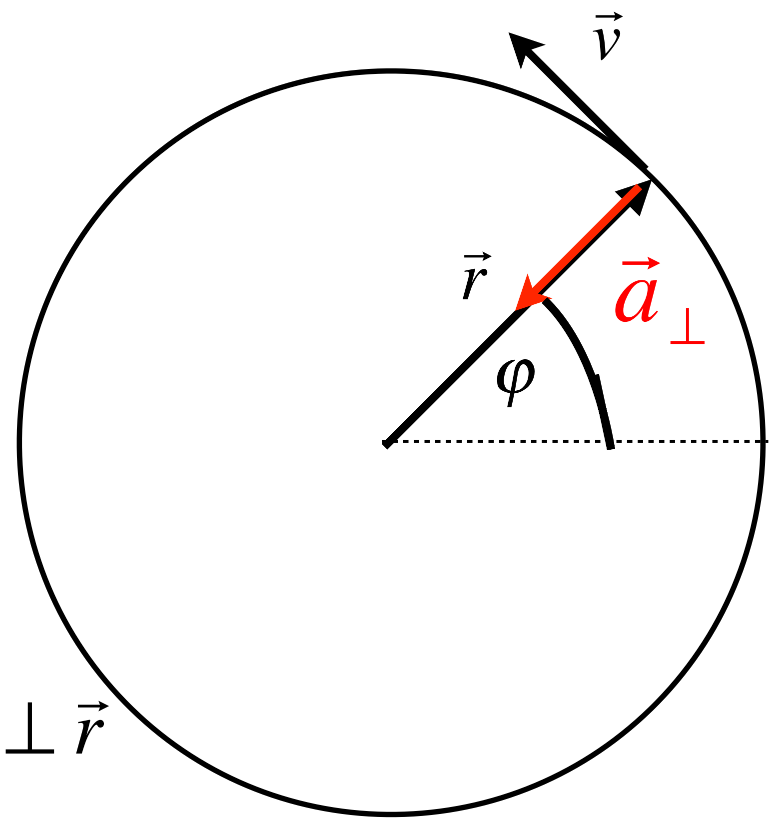
$$v_z(t) = v_{0z} - gt$$
$$z(t) = v_{0z}t - \frac{g}{2}t^2 = t(v_{0z} - \frac{g}{2}t)$$

Mouvement circulaire uniforme

$r = \text{const.}$

$\varphi = \omega_0 t$

$$\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\dot{x} = -r\omega_0 \sin\varphi$

$\dot{y} = r\omega_0 \cos\varphi$

$$\vec{v}\vec{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

$\ddot{x} = -r\omega_0^2 \cos\varphi$

$\ddot{y} = \; -r\omega_0^2 \sin\varphi$

$\vec{a} = -\omega_0^2 \vec{r}$

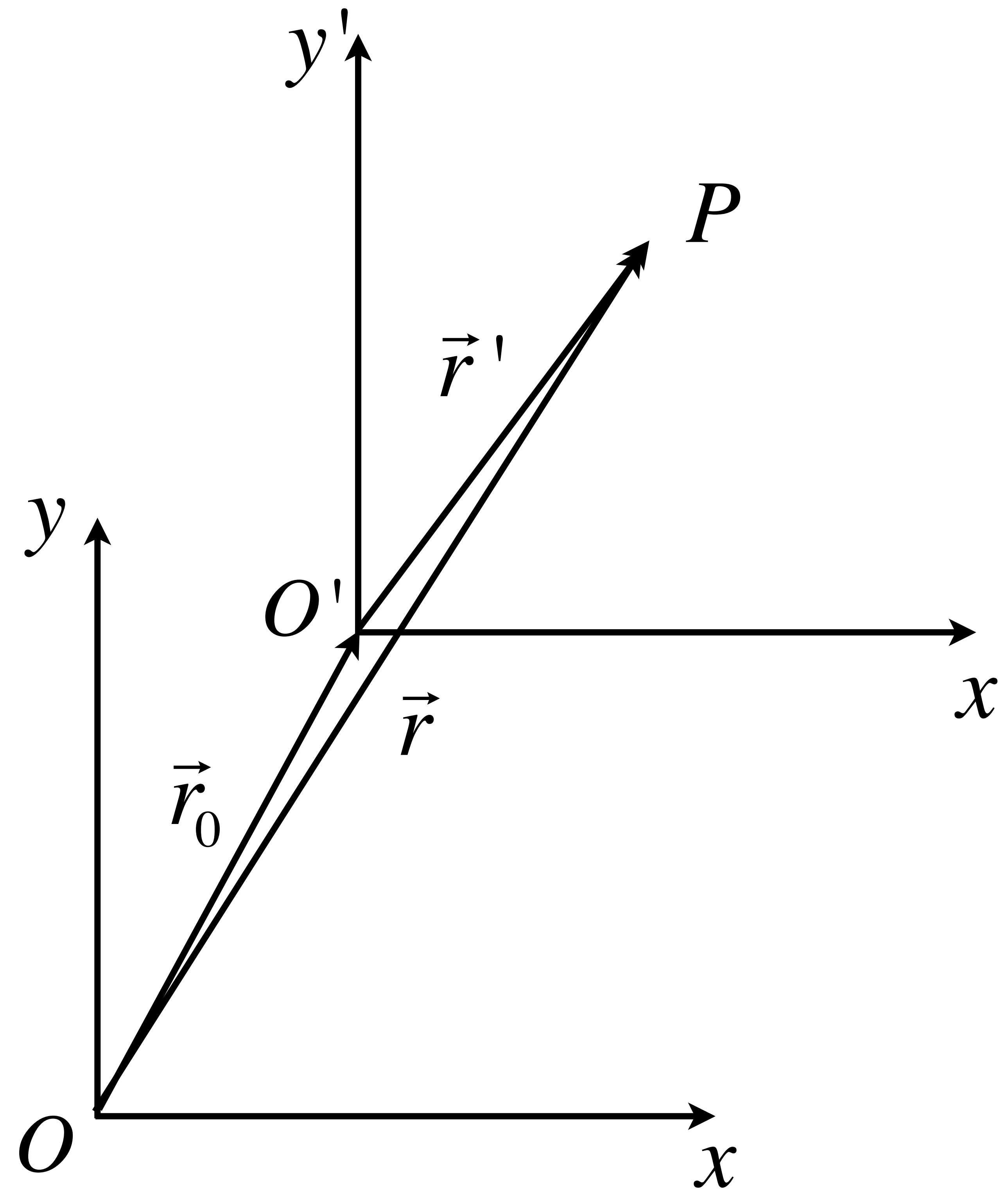
Mouvement relatif

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

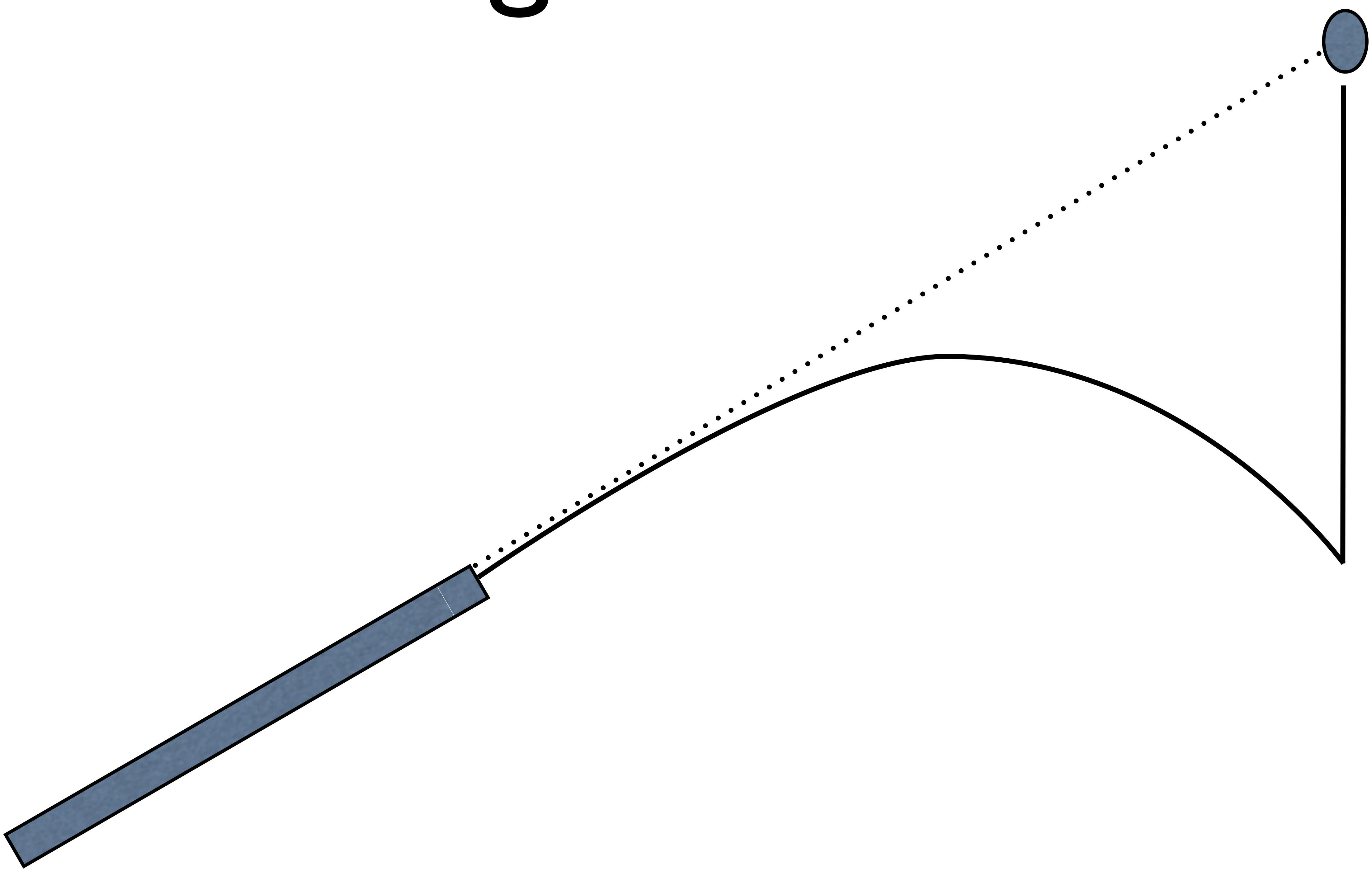
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$$

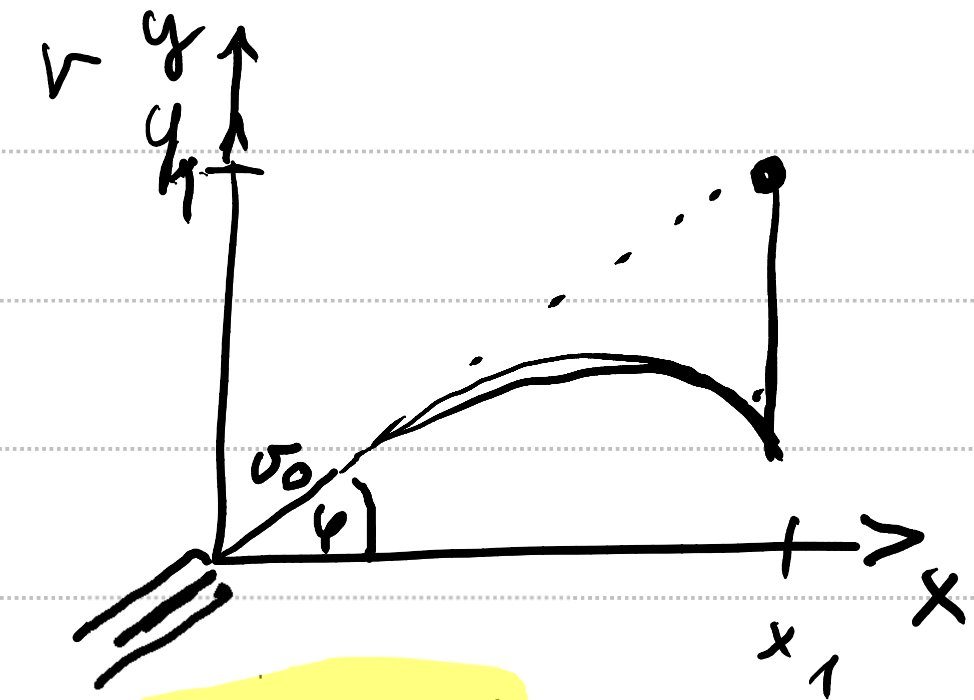
Si $\vec{a}_0 = 0 \qquad \vec{a} = \vec{a}\,'$



Le singe et le chasseur



$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg}\varphi$$



balle

$$\vec{r}_B = \begin{bmatrix} v_0 \cos\varphi \; t \\ v_0 \sin\varphi \; t - \frac{g t^2}{2} \end{bmatrix}$$

singe:

$$\vec{r}_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 - \frac{g t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2} t^2 \end{Bmatrix}$$

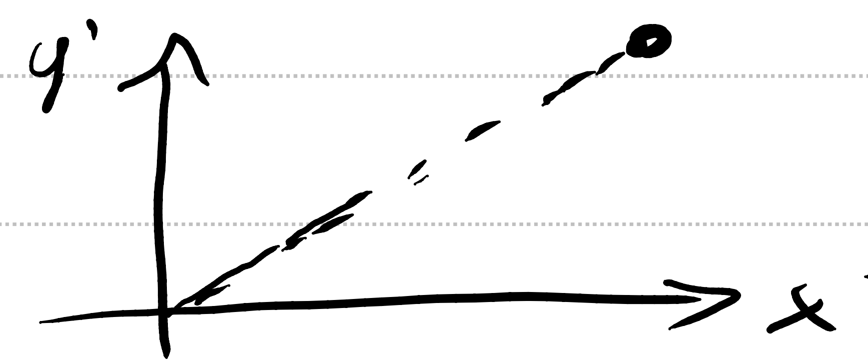
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\vec{r}\,'_B = \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \, t \\ v_0 \sin\varphi \, t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \\ v_0 \sin\varphi \end{pmatrix} t$$

$$\vec{r}\,'_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



Les lois de Newton

1. Il existe des référentiels dans lesquels tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'une force n'agisse sur lui.

2. L'accélération est proportionnelle à la force et se fait dans le sens de la force

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

3. Si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier:

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$$

La loi de l'inertie

Il existe des référentiels dans lesquels tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'une force n'agisse sur lui.

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:FrankHurleyCamouflagedAustralian18pounder.jpg

http://www.corporate-entertainment-hire.co.uk/ent/sport-arcade-machine-hire.html

L'équation de mouvement

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

masse, une propriété intrinsèque

caractérise la résistance au changement de vitesse

mesurée en kg

quantité additive

accélération

taux de changement de vitesse

force, la cause externe de l'accélération

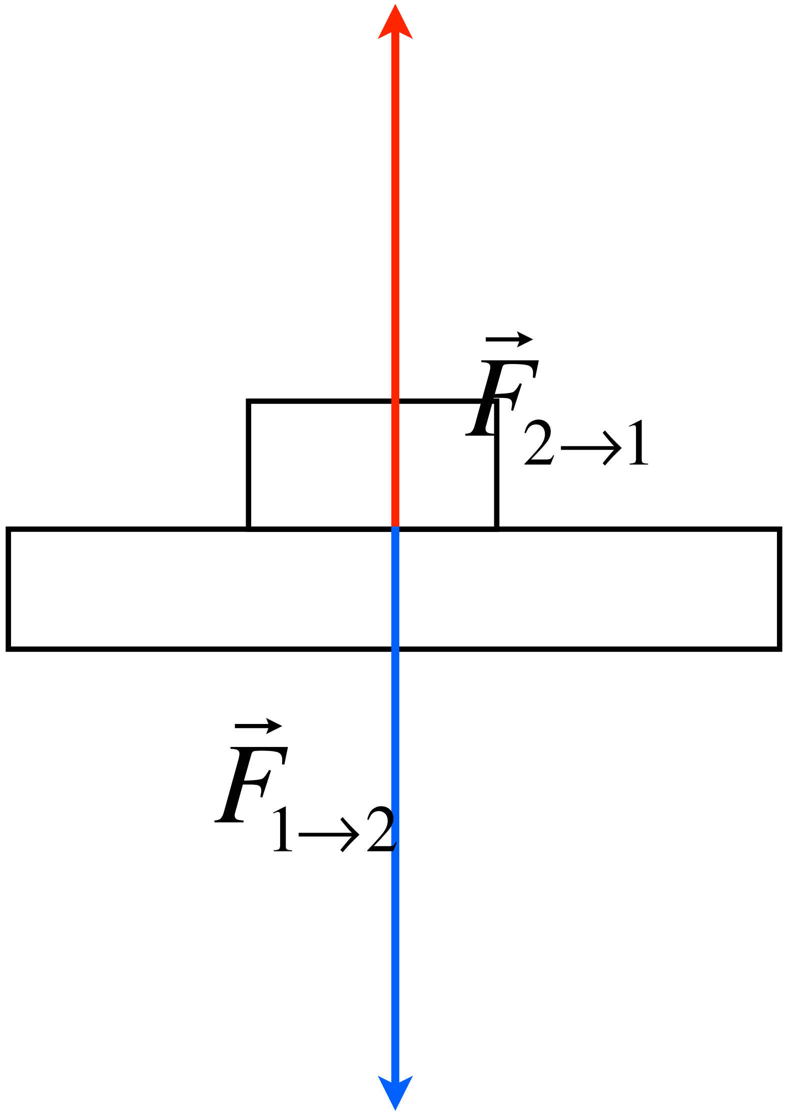
vecteur

mesuré en N

$$1\text{N} = 1\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$$

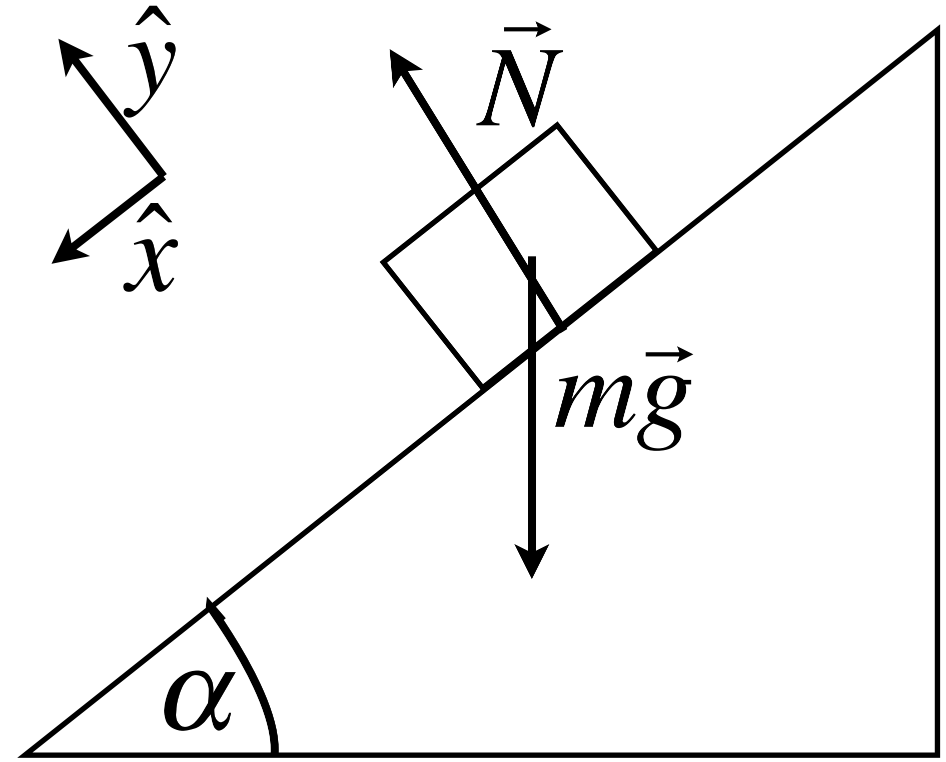
L'accélération est proportionnelle à la force et se fait dans le sens de la force

Action-réaction



$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$$

Les équations de mouvement selon les deux directions orthogonales :



$$ma_x = mg\sin\alpha$$

$$ma_y = N - mg\cos\alpha$$

Le fait que le mouvement soit contraint par la surface, et le choix de repère $a_y = 0$ permet de déterminer la force normale, qui est due à cette contrainte géométrique :

$$N = mg\cos\alpha$$

L'accélération a_x peut être déterminée à partir de la première équation :

$$a_x = g\sin\alpha$$

Exercices

1. Faites des dessins. Beaucoup d'énoncés s'éclaircissent quand on les accompagne d'un schéma. Vous pourrez arrêter de faire le dessin sur papier pour une sorte de problème seulement quand vous arriverez à le faire mentalement.
2. Lisez l'énoncé attentivement en notant toutes les données du problème. Gardez la place pour les données supplémentaires. Identifiez clairement ce que vous cherchez. Notez les inconnues.
3. Si la solution ne s'impose pas immédiatement, essayez de regarder quelques cas spéciaux (angle de 0 ou 90°, masse infinie, …) où la réponse est évidente.
4. Décidez sur quel type de problème vous travaillez (réponse à une force, équilibre, conservation d'énergie), et rappelez-vous les techniques standards pour le résoudre.
5. Déterminez si vous avez toutes les données nécessaires. Sinon, allez les chercher, par exemple dans un tableau des constantes.
6. Travaillez sur l'algèbre pour réduire le nombre de vos inconnues. Quand vous avez autant d'équations indépendantes que vous avez d'inconnues, vous avez fort probablement assez d'équations.
7. Si besoin est, ajoutez à votre liste des données ce que vous pouvez calculer, cela peut être utile.
8. Quand vous avez une solution algébrique, faites l'application numérique avec les unités.
9. Vérifiez :
    1. Plausibilité du résultat (algèbre correcte, signe, ordres de grandeur)
    2. Unités
    3. Notation (notation vectorielle, avez-vous calculé les trois composantes ou indiqué le vecteur unitaire ?)
    4. La solution satisfait-elle les cas spéciaux considérés en point 3 ?
10. Vérifiez une dernière fois si vous avez répondu à la question posée dans l'énoncé.